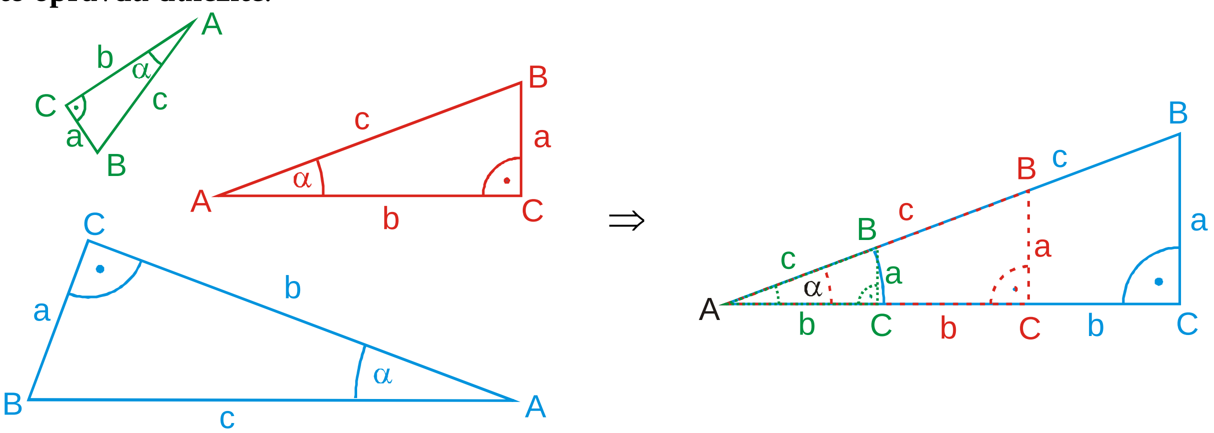
4.2.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

Předpoklady: 1107

Dnešní látku opakujeme už potřetí (poprvé na začátku matematiky, podruhé ve fyzice) $\Rightarrow$ **je to opravdu důležité**.



Všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem α mají dva stejné úhly (α a $90°$) $\Rightarrow$ mají stejný i třetí úhel (je to zbytek do $180°$) $\Rightarrow$ mají stejný tvar $\Rightarrow$ jsou si podobné $\Rightarrow$ mají stejný poměr odpovídajících si stran $\Rightarrow$ poměr $\frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$ je stejné číslo u všech pravoúhlých trojúhelníků s úhlem α.

Když si vybereme úhel α, tak už je jasné kolik vyjde v pravoúhlém trojúhelníku s tímto úhlem poměr $\frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ **poměr** $\frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$ **je číslo jednoznačně určené velikostí úhlu α** $\Rightarrow$ poměr $\frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$ můžeme považovat za hodnotu nějaké funkce vyrobenou z čísla α.

Funkci nazveme sinus α ($\sin \alpha$) $\Rightarrow$ $y = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c} = \sin \alpha$.

Za hodnotu funkce $y = \sin x$ pro $x \in (0°;90°)$ považuje hodnotu zlomku $\frac{a}{c}$, kde *a* je velikost protilehlé odvěsny a *c* je velikost přepony v libovolném pravoúhlém trojúhelníku s úhlem *x*.

Podobně můžeme využít i další poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku s úhlem *x*:

$\cos x = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{b}{a}$

Vzorce pro goniometrické funkce:

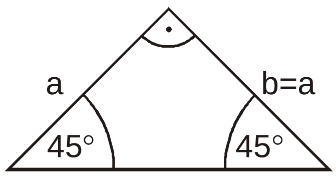
- $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Proč? $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha = (\mathrm{cotg}\,\alpha)^{-1}$ Proč? $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \dfrac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha} = (\mathrm{cotg}\,\alpha)^{-1}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ Proč? Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Jak určíme hodnoty výpočtem?
Jde to pro vhodné úhly v trojúhelnících, kde známe délky stran.

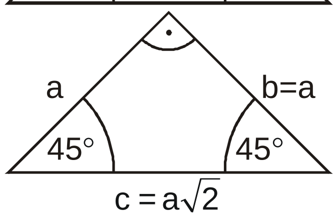
1. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

Ramena jsou stejně dlouhá.



Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

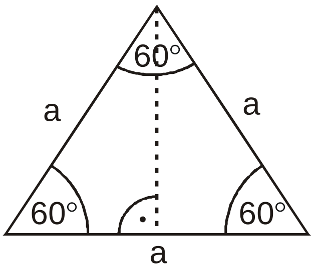


Př. 1: Urči pomocí rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 45°$.

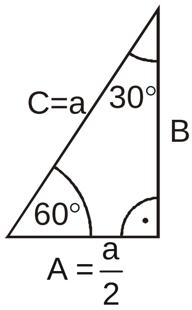
$$\sin 45° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{tg}\,45° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$
$$\cos 45° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{cotg}\,45° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$

2. rovnostranný trojúhelník

Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly $30°$ a $60°$.



$\Rightarrow$

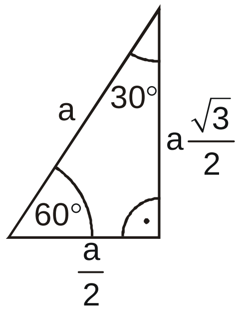


Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$

$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$

$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$



Př. 2: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 60°$.

$\sin 60° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\, 60° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Př. 3: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 30°$.

$\sin 30° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{cotg}\, 30° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

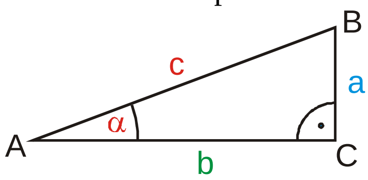
Přepíšeme hodnoty do tabulky. Hodnoty funkcí pro $0°$ a $90°$ neurčíme pomocí pravoúhlého trojúhelníka (žádný takový neexistuje), ale dodefinujeme si je jako čísla, ke kterým se hodnoty funkce blíží, když se x blíží $0°$ nebo $90°$.

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**

$\sin(x)$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
$\cos(x)$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
$\mathrm{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Jak si tabulku zapamatovat?



$\sin x = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\sin x$ **zvětšuje**

$\cos x = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\cos x$ **zmenšuje**

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Všechny hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ můžeme zapsat ve stejném tvaru $\frac{\sqrt{číslo}}{2}$.

- Pro $\sin x$ dosazujeme postupně 0 až 4 (hodnoty rostou).
- Pro $\cos x$ dosazujeme postupně 4 až 0 (hodnoty klesají).

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30°$ má velikost přepony $c = 4\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Pro stranu a: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 4 = 2\,\text{cm}$.

Pro stranu b: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 30° \cdot 4 = 3{,}46\,\text{cm}$.

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 40°$ má velikost odvěsny $a = 9\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 40° = 50°$.

Pro stranu *c*: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{9}{\sin 40°} = 14,00\,\text{cm}$.

Pro stranu *b*: $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{9}{\text{tg}\,40°} = 10,73\,\text{cm}$.

Pedagogická poznámka: Studentům je dobré připomenout zásadu, podle které se snažíme počítat přímo ze zadaných hodnot. Pro většinu z nich je u předchozího příkladu přirozenější vypočítat přeponu a stranu *b* počítat z ní.

Př. 6: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem β a s úhlem $\alpha = 25°$ má velikost odvěsny $a = 10\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pravým úhlem v trojúhelníku je β $\Rightarrow$ goniometrické funkce musíme používat ve tvaru $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona}$ (platí vždy) ne ve tvaru $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (platí pouze u trojúhelníků s pravým úhlem γ).

Pro γ platí: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 25° - 90° = 65°$.

Pro stranu *b*: $\sin\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin 25°} = 23,66\,\text{cm}$.

Pro stranu *c*: $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{10}{\text{tg}\,25°} = 21,45\,\text{cm}$.

Shrnutí: Velikost úhlu v pravoúhlém trojúhelníku přímo popisuje jeho tvar poměrem stran. Tyto poměry zavádíme jako goniometrické funkce $\sin x = \frac{protilehlá}{přepona}$, $\cos x = \frac{přilehlá}{přepona}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá}$, $\text{cotg}\,\alpha = \frac{přilehlá}{protilehlá}$.